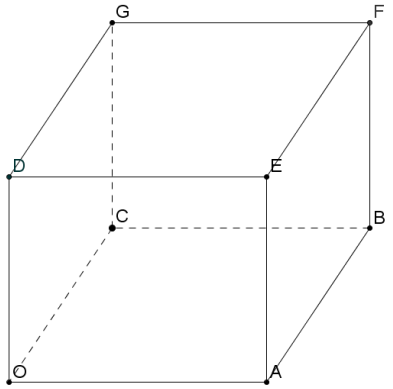
b) $\mathcal{A}_{(OMM')}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MM'}\right\|}{2}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{OM}\wedge\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right\|}{2}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\times\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right\|\times\left|\sin\left(\overrightarrow{OM},\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\times\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right\|$

car $\overrightarrow{OM}\perp\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$

Exercice N°6 Soit le cube OABCDEFG représenté sur la figure ci-dessous. L'espace est orienté par le repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$. On désigne par a un réel strictement positif. Les points L, M et K sont définie par :

$\overrightarrow{OL}=a\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{BK}=a\overrightarrow{BF}$.



1) a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}$.

b) En déduire l'aire du triangle DLM.

c) Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DML).

2) On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DML).

a) Démontrer que : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ *et* $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que : $\overrightarrow{OH}=\lambda.\overrightarrow{OK}$. Démontrer que $\lambda=\dfrac{a}{a^2+2}$.

c) En déduire que H appartient au segment [OK]. d) Déterminer les cordonnés de H.

e) Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que : $HK=\dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

3) A l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a.

Exercice N°6 1) a) Les coordonnés de D, M et L dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$ sont D(0,0,1), M(a,0,0) et L(0,a,0)

d'où $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}a\\0\\-1\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix}0\\a\\-1\end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix}a\\a\\a^2\end{pmatrix}$.

b) L'aire A_1 du triangle DLM s'exprime à l'aide du produit vectoriel : $A_1=\dfrac{\left\|\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}\right\|}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+a^2+a^4}}{2}=\dfrac{a\sqrt{a^2+2}}{2}$.

c) On a B(1,1,0), F(1,1,1) et $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{OB}+a\overrightarrow{BF}$ *donc* $K(1,1,a)$ alors $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{DL}=1\times0+1\times a+a\times(-1)=0$ *et* $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{DM}=0$, (OK) étant orthogonale à (DL) et (DM) est donc orthogonale au plan (DLM).

2) a) Comme H et M appartiennent au plan (DML), la droite (HM) est donc orthogonale à la droite (OK) et donc que $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{OK}=0$, on a alors $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK}=\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HM}\right).\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$.

b) Comme M(a,0,0) et K(1,1,a) alors $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK}=a$, de plus $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK}=\lambda.\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OK}=\lambda\left(1+1+a^2\right)=\lambda\left(2+a^2\right)$

$d'où\ \lambda\left(2+a^2\right)=a\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{a}{a^2+2}$. Le trinôme ($a^2$-a+2) ayant un discriminant négatif donc il a un signe constant positif donc $a^2-a+2>0\Leftrightarrow a^2+2>a\Rightarrow1>\dfrac{a}{a^2+2}>0$ puisque a est un réel positif alors $H\in[OK]$.

c) On a $\overrightarrow{OH}=\lambda.\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow\overrightarrow{OH}=\dfrac{a}{a^2+2}\overrightarrow{OK}$ *alors* $H\left(\dfrac{a}{a^2+2},\dfrac{a}{a^2+2},\dfrac{a^3}{a^2+2}\right)$.

d) On a $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OK}-\dfrac{a}{a^2+2}\overrightarrow{OK}=\dfrac{a^2-a+2}{a^2+2}\overrightarrow{OK}$ *or* $HK=\left\|\overrightarrow{HK}\right\|=\left|\dfrac{a^2-a+2}{a^2+2}\right|\left\|\overrightarrow{OK}\right\|=\left|\dfrac{a^2-a+2}{a^2+2}\right|\times\sqrt{a^2+2}$ on a $\dfrac{a^2-a+2}{a^2+2}>0$ *donc* $HK=\dfrac{a^2-a+2}{a^2+2}\sqrt{a^2+2}=\dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

3) Soit V le volume du tétraèdre DLMK, alors $V=\dfrac{1}{3}A_1\times HK=\dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{a^2+2}}{2}\times\dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}=\dfrac{a\left(a^2-a+2\right)}{6}$

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...